

 UNGE	PRUEBAS DE SELECTIVIDAD	
	CONVOCATORIA	ORDINARIA DE JUNIO DE 2017
	FASE	ESPECIFICA
	ASIGNATURA	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
ATENCIÓN: La prueba consta de dos opciones (A y B), de las que sólo debe elegir una. Una vez seleccionada la opción solamente se valorarán las respuestas a las cuestiones de la misma. La puntuación máxima de la prueba es de 10 puntos. Cada pregunta va acompañada de su máxima calificación, en el caso de ser contestada correctamente.		

OPCION A

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} K & -1 & 0 \\ -7 & K & K \\ -1 & -1 & K \end{pmatrix}$
 - a) Estúdiense para qué valores del parámetro k la matriz A tiene inversa (1 punto)
 - b) Determinése, para k=1, la matriz X tal que $X.A=Id$ (3 puntos)

Nota: Id denota la matriz identidad de dimensión 3x3
2. Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+b}{x-2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$
 - a) Determinése para qué valores del parámetro b la función es continua en $x = -1$ (1 punto)
 - b) Calcúlese las asíntotas de $f(x)$ (3 puntos)
3. Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:
 - a) La segunda bola extraída sea roja (1 punto)
 - b) Las dos bolas extraídas sean blancas (1 punto)

OPCIÓN B

EJERCICIO N° 1:

2 puntos

En un determinado polideportivo se practican fundamentalmente dos tipos de deportes: el fútbol y el baloncesto. De los 120 jóvenes inscritos 75 se han apuntado a fútbol y 57 a baloncesto, mientras 23 se han apuntado a ambos deportes.

- a) ¿Cuántos han ignorado el fútbol?
- b) ¿Cuántos han desechado el baloncesto?
- c) ¿Cuántos practican el fútbol pero no el baloncesto?
- d) ¿Cuántos jóvenes se ha inscrito en el fútbol o baloncesto?
- e) ¿Cuánto no se han apuntado ni al fútbol ni al baloncesto?

EJERCICIO N° 2:

4 puntos

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de los parámetros a y b

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - 2y + z &= 1 \\ x + ay - 2z &= b \end{aligned}$$

EJERCICIO N° 3:

4 puntos

Calcular los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Actividad 1

(a)

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero.

Pasos a seguir:

Paso 1. Hallar el polinomio en k resultante del cálculo del determinante de A

Paso 2. Hallar las raíces del polinomio del paso 1.

Paso 3. Solución: A tiene inversa para cualquier valor real de k distinto de los valores hallados en el paso 2.

Cálculos.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 6k ;$$

$$k^3 + k^2 - 6k = 0 \rightarrow k(k^2 + k - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=3 \\ k=-2 \end{cases}$$

Por tanto, A tiene inversa $\forall k \in \mathbb{R}$ y distinto de $\{0, 3, -2\} \Rightarrow$
 $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3, -2\}$

(b) para $k=1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

si $X \cdot A = I_3$, por definición de matriz inversa, X es la inversa de A .

Por el apartado (a), para $k=1 \neq \{0, 3, -2\}$, sabemos que A tiene inversa.

$$X = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$$

$$|A| = k^3 + k^2 - 6k \Rightarrow \text{for } k=8, |A| = -4 ;$$

para cualquier
valor de k
(apartado a)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Actividad 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+b}{x-2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

(a) $f(x)$ es continua en $x=-1$ si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$, $f(-1)$ finito.

Cálculos.

$$f(-1) = \frac{-(-1)+b}{-1-2} = \frac{1+b}{-3} = \boxed{\frac{-1-b}{3}};$$

como $f(x)$ tiene distinta definición a la izquierda y a la derecha de -1 , procedemos al cálculo de los límites laterales y exigir que coincidan, si es posible.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x+b}{x-2} = \boxed{\frac{-1-b}{3}} = f(-1);$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+5}{x+3} = \boxed{\frac{4}{2} = 2}.$$

Resolvemos la indeterminación factorizando los polinomios numerador y denominador para luego simplificar.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x=-1$ si se cumple

$$\frac{-1-b}{3} = 2 \Rightarrow b = -7$$

(b)

- Asintotas verticales

$x = x_0$ es A.V. de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Del apartado a tenemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \frac{-1-b}{3} & \text{en } (-\infty, -1] \text{ siendo } b \in \mathbb{R} \\ \frac{x_0^2 + 6x_0 + 5}{x_0^2 + 4x_0 + 3} & \text{en } (-1, +\infty) \text{ sabiendo que el denominador no se anula en este intervalo.} \\ 2 & \text{en } x_0 = -1^+ \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ no tiene A.V.

- Asintotas horizontales.

$y = y_0$ es A.H. de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$ o $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x+b}{x-2} \right) = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ es A.H. de } f(x) \text{ por la izquierda}$$

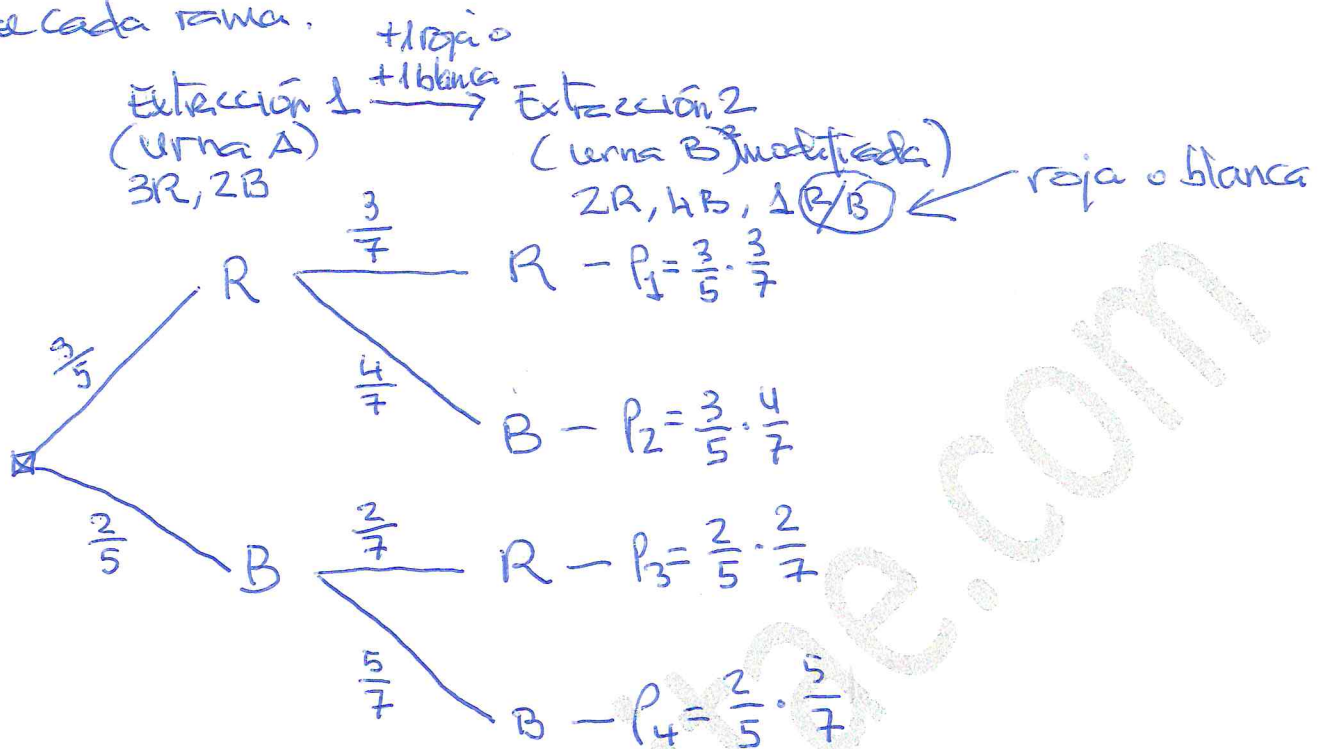
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es A.H. de } f(x) \text{ por la derecha}$$

- Asintotas oblicuas.

Como $f(x)$ tiene A.H. por ambos lados, se concluye que no tiene asíntota oblicua.

Actividad 3

Construimos el árbol de extracciones con las probabilidades de cada rama.



a) $P(\text{roja la 2ª bda extraída}) = P_1 + P_3$

b) $P(\text{blanca las dos bolas extraídas}) = P_4$

OPCIÓN B

Actividad 1

Elaboramos la tabla de contingencia.

	Practica baloncesto	No practica baloncesto	
Practica fútbol	23	(52) 75-23	75
No practica fútbol	(34) 57-23	(11) 63-52	(45)
	57	(63) 120-57	120

a) 45

c) 52

e) 11

b) 63

d) 109

↑
practica fútbol y baloncesto 23 +
practica fútbol y no baloncesto 52 +
practica baloncesto y no fútbol 34

109

Actividad 2

Calculamos los rangos de la matriz del sistema y la ampliada dependiendo de los valores de los parámetros a y b.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & -2 & b \end{array} \right)$$

Rango de A.

$$|A| = 9 - 3a$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\text{si } a \neq 3, \text{rg}(A) = 3$$

$$\text{si } a = 3, \text{rg}(A) = 2 \text{ ya que hay al menos un menor de orden 2 distinto de } 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Rango de A'

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } a \neq 3, \operatorname{rg}(A) = 3 \\ A' \text{ tiene dimensión } 3 \times 4 \\ A \text{ es submatriz de } A' \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{rg}(A') = 3 \text{ para cualquier valor de } b$$

$$\text{Si } a \neq 3, \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') = 3$$

Sistema Compatible Determinado

$$\text{Si } a = 3$$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ b \end{array}$$

menor de orden 2 distintos de cero $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

menores ordenados de orden 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & b \end{vmatrix} = 10 - 5b = 0 \Leftrightarrow b = 2.$$

Si $a = 3$ y $b = 2$, $\operatorname{rg}(A') = 2 = \operatorname{rg}(A)$ Sistema Compatible IndeterminadoSi $a = 3$ y $b \neq 2$, $\operatorname{rg}(A') = 3 \neq 2 = \operatorname{rg}(A)$ Sistema Incompatible

Resumen de la discusión

Si $a \neq 3$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') = 3$ SCDSi $a = 3$ y $b = 2$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') = 2$ SCISi $a = 3$ y $b \neq 2$, $\operatorname{rg}(A) = 2 \neq 3 = \operatorname{rg}(A')$ S.I

Actividad 3

los puntos de inflexión de $f(x)$ son los puntos del dominio en los que la función cambia de curvatura (cóncava/convexa) y en ellos la derivada segunda se anula.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)(2(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

factor común
(x-1) en el
numerador

$$\frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4}$$

y como $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f$
se concluye que $f(x)$ no tiene puntos de inflexión